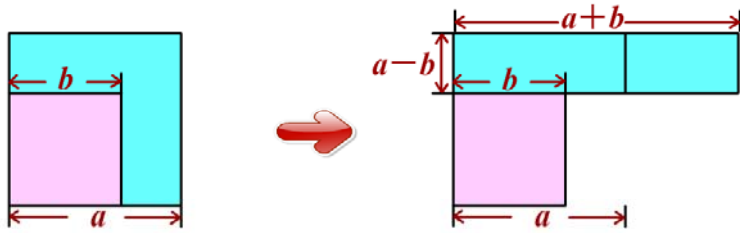


整数与数列(下)

【大海传功】



平方差公式： $a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$

【例1】(★★★)计算:

$$20 \times 20 - 19 \times 19 + 18 \times 18 - 17 \times 17 + \dots + 2 \times 2 - 1 \times 1$$

210

【例2】(★★★)计算:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2 + 11^2$$

66

【例3】(★★★★)

$$(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2)$$

5050

【例4】(1)(★★★)

利用“平方差公式”，我们还可以巧算下列各题，让我们来试试吧。

(1) 98×102 (2) $2 \times 29 \times 3 \times 31$

(1) 9996 (2) 5394

【例4】(2)(★★★★)计算:

$11 \times 19 + 12 \times 18 + 13 \times 17 + 14 \times 16$

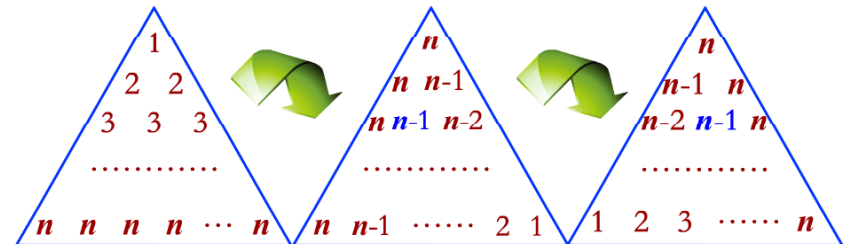
870

【大海传功】

平方和公式： $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1) \div 6$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + n \times n$$

$$= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + \dots + n + n + \dots + n$$



$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots + n \times n \\
 &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + \cdots + n + n + \cdots + n \\
 &= (2n + 1) \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \div 3 \\
 &= (2n + 1) \times n \times (n + 1) \div 2 \div 3 \\
 &= n(n + 1)(2n + 1) \div 6
 \end{aligned}$$

【例5】 (★★★★)

已知: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1) \div 6$

求: $15^2 + 16^2 + 17^2 + \cdots + 21^2$

2296

【例6】 (★★★★) 计算: $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \cdots + 100^2$

171700

【大海点睛】

一、本讲知识

● 等差数列

通项公式: 末项 = 首项 + (项数 - 1) × 公差

项数公式: 项数 = (末项 - 首项) ÷ 公差 + 1

求和公式: 和 = (首项 + 末项) × 项数 ÷ 2

中项定理: 一个等差数列若有奇数项, 则必有一个中间项
这个中间项就是这串数的平均数;
这个数列的和 = 中间项 × 项数

● 常见结论

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

● 常见公式

平方差公式: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

平方和公式:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1) \div 6$$

二、本讲经典例题

等差数列: 例1(2), 例4, 例5(1)(4), 例6

经典公式: 例1, 例3, 例4(2), 例6